

ӘСКЕРБЕКОВА ЖАНАР ӘСКЕРБЕКҚЫЗЫ
«ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ПРОДОЛЖЕНИЯ ЖЛЯ
УРАВНЕНИЯ АКУСТИКИ И ГЕЛЬМКОЛЬЦА»

АННОТАЦИЯ

**диссертации на соискание степени доктора философии (PhD) по
специальности «6D070500 -математическое и компьютерное
моделирование»**

Актуальность темы исследования. Диссертационная работа посвящена развитию актуального для приложений научного направления - разработке и исследованию численных моделировании задачи продолжения для уравнения акустики и Гельмгольца. Поиск причин при распознавании их следствий представляет собой идею решения обратных задач волновых уравнений. С теоретической точки зрения, вычисление звукового поля точечного или распределенного источника сводится к решению краевой задачи для уравнения Гельмгольца в неоднородных областях. Исследование волнового эксперимента в природных условиях требует больших затрат, тем более при изучении полей звуковых волн в океане. В связи с этим особенно важным является численный эксперимент, который ставится в управляемых условиях с обеспечением полной повторяемости входных и выходных данных, с любой практически необходимой точностью, в любых вариантах изменения параметров задачи.

В изучении структуры внутреннего строения земли важное место занимают геофизические методы. В их основе лежит проведение измерений характеристик некоторого физического поля на земной поверхности, несущего информацию о структуре земли. Такими полями, в частности, являются акустическое и электромагнитное поля, которые в случае акустики зависят от скорости распространения волн и плотности, а в электродинамике - от проводимости магнитной проницаемости.

Задачи продолжения решения с времяподобной поверхности для гиперболических уравнений изучались М.М. Лаврентьевым, В.Г. Романовым Р. Курантом, С.П. Шишацким. Позже В.Г. Романов получил априорные оценки решения задачи Коши с данными на времениподобной поверхности.

Основной подход к решению обратных задач, в том числе задач геофизики, основан на предварительном решении прямых задач в выбранном классе моделей. Дальнейшее определение параметров среды сводится к приближенному описанию экспериментального поля путем решения прямой задачи. При этом, согласно идее В. Н. Страхова, можно решать обратную задачу без решения прямой, владея лишь дифференциальным оператором, которому подчиняется поле. Во многих случаях данные гравитационных измерений не позволяют однозначно определить место бурения разведочных скважин. Поэтому целесообразно предварительно рассчитать аномальное гравитационное поле на определенной глубине под поверхностью Земли, используя имеющиеся данные. В связи с этим, существует значительная

практическая востребованность развития и анализа новых математических моделей геофизических процессов, которые позволяют с более высокой эффективностью решать как прямые, так и обратные задачи. Обратные задачи в гравиразведке решались в большинстве случаев методом подбора и лишь в двумерном случае. При этом вопросы единственности и устойчивости решений обратных задач геофизики были исследованы в ограниченной степени, но все же были получены определенные существенные результаты в этом направлении, в том числе теорема единственности решения П.С.Новикова. Таким образом, задача разработки точных, эффективных и высокоскоростных алгоритмов для решения прямых и обратных задач геологии и других областей науки в различных постановках является актуальной.

В работах М.М. Лаврентьева, В.Г. Романова, С.И. Кабанихина, А.Lorenzi, А.М. Денисова, М. Клибанова, М. Grasseli и др. исследовались линейные и нелинейные обратные задачи для уравнений гиперболического, параболического типа в различных формулировках. Такие задачи отличаются некоторыми свойствами, неприятными с точки зрения вычислительной техники - неединственностью, неустойчивостью относительно погрешности исходных данных, и нуждаются в специальных алгоритмах, разработанных на основе строгих теорий, базирующихся на использовании возможностей современных вычислительных технологий. Понимание того, какую модель и метод следует использовать в конкретной ситуации, требует некоторого знания, как ошибки аппроксимации модели, так и ошибки дискретизации метода. В связи с этим в настоящее время большое внимание уделяется разработке эффективных методов и алгоритмов решения различных классов обратных задач. В настоящее время заинтересованность в обратных задачах возросла, непрерывно возникают новые постановки обратных задач и, следовательно, новые результаты по решению. Последние применения задачи продолжения уравнения акустики находят в области борьбы с шумом и звукоизоляции. Это позволяет снизить уровень шума и загрязнения в таких средах, как городские районы, рабочие места и дома. Поэтому актуальной проблемой является разработка и развитие эффективных численных методов решения обратных задач для таких приложений. Настало время предложить подходы и эффективные численные методы создания единой теории обратных задач, встречающихся в различных областях приложений.

Целью диссертационной работы является создание и исследование численных решений обратных задач продолжения для уравнения акустики и Гельмгольца. Построение быстродействующих и экономичных итерационных методов для рассматриваемых задач. Программная реализация новых численных методов решения обратных задач. Обеспечение повышения точности, скорости и устойчивости решения прямых и обратных задач.

Задачи исследования. Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Исследование и разработка методов решения задачи продолжения для уравнения акустики.

2. Создание алгоритма численного решения обратной задачи для одномерных и двумерных уравнений акустики на основе метода градиентов, метода обращения конечно-разностных схем.

3. Исследовать и разработать численные методы решения некорректной начально-краевой задачи для уравнения Гельмгольца.

4. Численное исследование устойчивости прямой и обратной задач для уравнения Гельмгольца.

5. Создание программ для реализации рассмотренных методов.

Объектом исследования являются алгоритм построения численного решения задачи продолжения для уравнения акустики и Гельмгольца.

Методы исследования. Для численного решения рассматриваемых моделей используются методы, позволяющие решить задачу восстановления границы. Используются метод конечных разностей, метод Ландвебера, метод обращения разностных схем. Для численного моделирования использовались языки программирования C++, Python.

Научная новизна работы заключается в следующем:

- Построен эффективный численный алгоритм на основе метода обращения разностной схемы для граничной обратной задачи акустического уравнения в треугольной области.

- С помощью производной по направлению найден градиент целевого функционала граничной обратной задачи для уравнения акустики в области времениподобной треугольной призмы. Построен алгоритм решения обратной задачи. Новизна задачи заключается в том, что двумерная задача рассматривается в области треугольной призмы.

- Создан эффективный численный алгоритм на основе метода Ландвебера для решения обратной задачи восстановления двух неизвестных граничных условий для уравнения Гельмгольца в четырехугольной области и получены численные расчеты.

Положения, выносимые на защиту. По результатам исследования на защиту выносятся следующие положения:

- Численное решение граничной обратной задачи с помощью метода обращения разностных схем. Проведены вычислительные эксперименты с различными уровнями шума.

- Сведение некорректно поставленной задачи в обратную задачу, в области треугольной призмы, и вычисление градиента функционала.

- Применение проекционного метода для прямой задачи при решении двумерной обратной задачи акустики во временной треугольной области, а также сходимость итерационного метода Ландвебера.

- Оптимизационный метод решения начально-краевой задачи для уравнения Гельмгольца, в которой вместе с данными на поверхности используются данные в глубине, показывает, что добавление новых данных позволит более устойчиво определить решение.

- Численное исследование устойчивости начально-краевой задачи для уравнения Гельмгольца показывает неустойчивость задачи, так как число обусловленности стремится к бесконечности.

Теоретическая и практическая значимость исследования.

Результаты, полученные в диссертации, являются новыми и имеет научный характер. Представленные результаты имеют теоретическую и практическую ценность. В работе рассматривается разработка и обоснование численных методов решения задач акустики как важнейшее научное направление для ее применения. Теоретическая и практическая значимость диссертационной работы заключается в разработанном численном методе решения рассмотренных прямых и обратных задач. Использование алгоритмов и программ, разработанных в диссертации, значительно повышает эффективность решения рассматриваемых задач. В дальнейшем результаты работы могут применяться при изучении и развитии теории обратных задач, возникающих в волновых полях. Разработанные алгоритмы и программы имеют практическую возможность использования в поисковой сейсмологии и акустической томографии, а также, согласно последним исследованиям, при исследовании шумоизоляции.

Апробация работы. Результаты диссертации опубликованы в 12 научных журналах. Основные результаты исследований докладывались и обсуждались на следующих конференциях:

- Международная конференция. «Обратные задачи в финансах, экономике и жизни» (Алматы, 26-28 декабря, 2017 г.).

- Международная конференция. «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании» (CITech-2018) <https://www.springer.com/series/7899>. (Усть-Каменогорск, Казахстан, 25-28 сентября, 2018 г.).

- Международная апрельская математическая конференция, в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 1150-летию Абу Насыр аль-Фараби, (г. Алматы, 1-3 апреля, 2020 г.).

- 6-я Международная конференция математических наук (ICMS 2022), Университет Малтепе (Стамбул, Турция. 20-24 июля 2022 г.).

- 8-я Международная конференция по управлению и оптимизации с промышленными приложениями, COIA-2022 (Баку, Азербайджан, 24-26 августа 2022 г.).

- Международная конференция «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании» (CITech-2022), посвященной 90-летию со дня рождения академика Н. К. Надирова и 80-летнему юбилею академика М. О. Отелбаева (г. Алматы, 12-15 октября 2022 г.).

- Международная научная конференция «Обратные и некорректные задачи в естествознании» (г. Алматы, 11-12 апреля 2023 г.).

Публикации. Результаты диссертационной работы опубликованы в 12 работах. Из них 2 публикации в рейтинговых журналах, 4 статей в журналах, рекомендуемых ККСОН МОН РК, 6 тезисов в материалах международных конференций.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованных источников. Общий объем работы составляет 103 страниц. Список литературы содержит 95 наименования.

Краткое содержание работы. Во введении приводится обзор публикаций, связанных с темой диссертации, обосновывается актуальность темы исследования. Сформулирована цель работы, научная новизна и практическая значимость полученных результатов, кратко излагается содержание работы.

Первая глава посвящена построению оригинальных экономических алгоритмов решения задачи продолжения для одномерного уравнения акустики. В главе исследована одномерная задача продолжения с части границы решения уравнения акустики. Основой задачи продолжения является нахождение значения искомой функции в остальной части границы с помощью дополнительной информации в определенной части границы. Построена конечно-разностная схема для рассматриваемой обратной задачи, и методом обращения разностной схемы из этого разностного уравнения находится неизвестная функция. Для демонстрации эффективности и простоты рассматриваемого метода приводится тестовое задание. Приведены численные расчеты и графики этих числовых результатов.

Вторая глава диссертации посвящена постановкам двумерной обратной задачи акустики. Целью главы является построение эффективного алгоритма численного решения двумерной обратной задачи для уравнения акустики по данным на времениподобной поверхности. Основным результатом главы состоит в применении проекционного метода для прямой задачи при решении двумерной обратной задачи акустики во временной треугольной области. Построен алгоритм решения обратной задачи для уравнения акустики. Представлены результаты численных расчетов.

Третья глава посвящена разработке численному решению прямой и обратной задач для уравнения Гельмгольца. Если закон колебания физической среды гармонически зависит от времени, то волновое уравнение может быть преобразовано в уравнение Гельмгольца. Основным результатом главы состоит в получении формулы для вычисления градиента функционала через решение прямой и сопряженной задач и построении алгоритма решения задачи продолжения. Представлены и проанализированы сингулярные значения оператора A для исходной и прямой задач. Также в конце представлены результаты численных экспериментов, показывающие эффективность метода.

В заключении приводятся основные выводы по теме диссертации обсуждаются перспективы применения полученных результатов и перспективы дальнейшей работы в выбранном направлении.